***Практическая работа №4***

**События и их классификация. Классическое и статистическое определения вероятности случайного события. Сумма и произведение событий Вероятность появления хотя бы одного события. Решение задач по теме «Вычисление вероятностей событий».**

**Цели работы:**

В результате изучения этой темы Вы должны уметь:

- по относительной частоте события оценивать его вероятность и наоборот;  
- подсчитывать вероятность события, пользуясь классическим определением вероятности;  
- вычислять вероятности суммы несовместных событий, произведения независимых событий;  
Для овладения навыками решения задач Вам необходимо усвоить следующие вопросы:

*Случайный опыт и случайное событие. Относительная частота события. Вероятность события. Операции над событиями. Теоремы сложения и умножения вероятностей.*

**Контрольные задания:**

Вы должны уметь решать задачи следующих типов:

*1. При 200 выстрелах стрелок в среднем 185 раз попадает в цель.  
Какова вероятность того, что наудачу выбранный выстрел окажется метким?  
2. Вероятность прорастания отдельного семени в некоторой партии равна 0,89. Сколько таких же семян взойдёт из партии в 1600 семян?  
3. Из ящика, содержащего 12 стандартных деталей и 4 бракованные, наудачу извлекают одну деталь.*

*Найдите вероятность того, что вынутая деталь стандартна.  
4.Станок-автомат производит изделия трёх сортов, при этом изделий первого и второго сорта соответственно 80% и 15%. Чему равна вероятность того, что наугад взятое изделие будет 2-го или 3-го сорта?  
5.Электрическая цепь состоит из двух элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятности их безотказной работы соответственно равны 0,9 и 0,8. Найдите вероятность того, что цепь будет проводить ток, если элементы соединены последовательно.*

**Теоретический материал:**

Исходными понятиями теории вероятностей являются понятия случайного опыта, случайного события и вероятности случайного опыта, случайного события и вероятности случайного события. Термин «случайный опыт» или «случайный эксперимент» используется для описания любого действия, которое можно повторить большое число раз в одинаковых условиях и результаты которого нельзя предугадать заранее. Примерами случайных опытов могут служить однократное или двукратное подбрасывание шестигранной игральной кости, стрельбы по мишени и др.  
Пусть А – один из возможных результатов эксперимента. Будем называть его также *случайным событием*.

*Относительной частотой случайного события* А называется отношение n(А)/n числа n(А) экспериментов, в которых произошло событие А, к числу n всех экспериментов.

Если относительная частота события А в сериях из n опытов при достаточно большом n колеблется около одного и того же числа Р, то такие опыты называются *статически устойчивыми*, а число Р – *вероятностью события* А.

Теория вероятностей имеет дело только со статистически устойчивыми экспериментами.

Когда говорят, что вероятность некоторого события равна, например, 0,73, то это практически означает, что в среднем в каждых 100 опытах это событие наступит примерно 73 раза.

Рассмотрим решение задач, подобных выше приведённым.

**Задача 1.** Для контроля качества продукции одного завода из каждой партии готовых изделий выбирают для проверки 100 деталей. Проверку не выдерживают в среднем 8 изделий. Какова вероятность того, что наугад взятое изделие этого завода окажется качественным?

Приводится 100 опытов (проверяют 100 деталей). Условие о том, что проверку не выдерживают испытания (это событие А). Итак, n=100, n(А)=92. Относительная частота события есть n(А)/n=92/100=0,92. Вероятность события А такова: Р(А)≈ n(А)/n, т .е Р(А)≈0,92.

**Задача 2.** Вероятность того, что размеры детали, выпускаемой станком-автоматом, окажутся в пределах заданных допусков, равна 0,96. Какое количество годных деталей будет содержаться в каждой партии объёмом 500 штук?

Здесь Р(А)=0,96; n=500. Требуется найти n(А), где событие А означает, что размеры деталей находятся в пределах заданных допусков. Так как Р(А)n(А)/n, то n(А)nP(А)=5000,96=480. Итак, примерно 480 деталей окажутся годными.

Для опытов с конечным числом равновозможных исходов справедливо классическое определение вероятности *Вероятностью события* А называется отношение числа исходов, образующих событие А, к числу всех равновозможных исходов опыта. Если в задаче говорится, что выбор производится наугад, наудачу, случайным образом, то это означает, что его исходы можно считать равновозможными.

**Задача 3.** В ящике 10 белых и 15 черных шаров (шары одинаковы во всем, за исключением цвета). Извлекают наудачу один шар. Найти вероятность того, что вынутый шар окажется белым.

Опыт состоит в извлечении наудачу одного шара из 25. Исходом опыта является извлечение любого из этих шаров. Число всех исходов равно 25. Требуется найти вероятность события А — «извлечен белый шар». Это событие наступает при любом из 10 исходов (10 белых шаров). Итак, *Р(А)=10/25*=0,4.

Для вычисления вероятностей событий часто пользу­ются правилами, позволяющими по вероятностям одних событий вычислять вероятности других событий, получа­емых из них с помощью некоторых операций.

Событие С, составленное из тех исходов опыта, которые принадлежат или событию *А,* или событию *В,* или *А и В* вместе, называют *суммой (объединением)* событий *А и В и* обозначают *С=А+В или С=АВ* Другими словами, событие *АВ* наступает тогда и только тогда, когда наступает или *А,* или *В,* или *А* и *В* одновременно.

Событие *D,* составленное из тех исходов опыта, которые принадлежат одновременно и событию *А*, и событию *В,* называют *произведением* событий *А и В и* обозначают *D=AB* или *D=A B.* Иначе говоря, событие *A B* на­ступает тогда и только тогда, когда наступают и событие *А, и* событие *В.*

События *А и В* называются *несовместными,* если *A B* есть невозможное событие.

Событие *А,* состоящее из тех и только тех исходов, которые не принадлежат событию *А,* называется *противоположным* событию *А:*

*Р(А)=1-Р(А).*

Если *А* и *В* несовместны. То *P(АВ)=Р(A)+P(B).*

События *А* и *В независимы* тогда и только тогда, когда *Р(A B)=Р(А)\*Р(В).*

**Задача4**. Завод в среднем дает 27% продукция высшего сорта и 70% первого сорта. Найти вероятность того, что взятое наудачу изделие будет либо высшего, либо первого сорта.

Введем обозначения: *А* — взятое наудачу изделие будет либо высшего, либо первого сорта; *В* — взятое наудачу изделие высшего сорта; С — взятое наудачу изделие первого сорта. При этомА=. Так как В и С — несовместные события, тоР(А)=Р(В)+Р**(**С).По условию,Р(В)=0,27; Р(С)-0,7; значит, Р(А) =0,97.

**Задача 5.** Прибор состоит из двух элементов, работающих независимо. Вероятности выхода из строя первого и второго элемента при включении прибора соответственно равны 0,05 и 0,08. Найти вероятность того, что при включении прибора: а) оба элемента выйдут из строя; 6) выйдет из строя только первый элемент; в) оба элемента будут работать.

Введем обозначения:А1 — первый элемент выйдет из строя;А2 — второй элемент выйдет из строя;А — оба элемента выйдут из строя; *В* — только первый элемент выйдет из строя; С — оба элемента будут работать.

а) Событие *А* наступит, если наступят иА1 и A2 : А = А1 А2*.* Так как по условию событияА1 и А 2 независимы, то

Р(А)-Р(А1) Р(А2) = 0,05 \* 0,08=0,004.

б) СобытиеВ наступит, если событиеА1произойдет, а событиеА2 не произойдет, т. е.В=А12. Так как события *А и В* независимы, то

независимыА и , и В, и . Значит,P(B)=P(A1)\*Р( 2). Но Р (2)= 1— Р(А2) = 1-0,08=0,92; поэтому Р(В) =0,05\*0,92= =0,046.

в) СобытиеС произойдет, если произойдут события 1 и2: С**=** 1: 2.

Так какР(С)=P(1)Р(2)и P(A1)=1–P(А1)=-1-0,05-0,95, то Р(С)=0,95\*0,92=0,874.

**Вопросы и упражнения для самопроверки**

1. Вероятность некоторого события равна 0,35. Что более вероятно: наступит это событие в одном опыте или не наступит?
2. Вероятность наступления события *А* в некотором опыте равна 0,72. Можно ли утверждать, что в 100 таких же опытах, проведен­ных в тех же условиях, это событие наступит ровно 72 раза?
3. Вероятность некоторого события в опыте с равновозможными ис­ходами равна 0,15. Это событие состоит из трех исходов Чему равны: а) вероятность каждого исхода; б) число исходов опыта?
4. Равновозможны лиим ли исходы: а) «промах» и «попадание» у отлич­ного стрелка; б) «выпал герб» и «выпала цифра» при бросании несимметричной монеты?
5. Какое событие противоположно следующему: а) «извлечен хота бы один белый шар»; б) «извлечено более двух белых шаров»; в) «сре­ди извлеченных нет белых шаров»?
6. Может ли сумма двух событий совпадать с одним из слагаемых? Если да, то что можно тогда сказать о другом из событий?
7. Может ли быть достоверным событием сумма двух несовместных событий?
8. При каком условии вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий?
9. Может ли вероятность суммы двух событий быть: а) меньше сум­мы вероятностей этих событий; б) равной сумме вероятностей этих событий; в) больше суммы вероятностей этих событий?
10. Чему равна вероятность суммы двух независимых событий?

***Практическая работа №5***

**Статистическое распределение и основные числовые характеристики выборки. Статистическое распределение выборки. Точность оценки.**

**Цели работы:**

В результате изучения этой темы Вы должны уметь:  
- вычислять вероятности событий, связанных со случайной величиной;

- вычислять математическое ожидание случайной величины по закону её распределения, а так же пользуясь свойствами математического ожидания.

- по заданному закону распределения этой величины - составлять закон распределения случайной величины;

**Контрольные задания:**

1. Вы должны уметь решать задачи следующих типов:  
   Случайная величина Х распределена по закону

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Хк | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Рк | 0,2 | 0,4 | 0,1 | 0,3 |

Найдите : а) Р(Х 3) ; б) Р(1Х4) ; в) Р(2Х4) ; г) Р(Х2)  
Уровень помех некоторого прибора оценивается по трехбалльной системе. Если помехи отсутствуют, то уровень считается равным 0 баллов. Многократными наблюдениями установлено, что в результате 100 испытаний этого прибора помехи в 1, 2 и 3 балла появлялись в среднем в 20, 6 и 4 случаях. В остальных испытаниях помехи отсутствовали. Составьте закон распределения уровня помех прибора.

1. Законы распределения выигрышей, выпадающих на один билет в двух лотереях, имеют вид

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Хк | 0 | 1 | 3 | 5 | 10 |
| Рк | 0,85 | 0,08 | 0,04 | 0,02 | 0,01 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Хк | 0 | 1 | 3 | 5 | 10 |
| Рк | 0,91 | 0,91 | 0,03 | 0,1 | 0,02 |

а) Какой лотерее Вы отдали бы предпочтение?  
б) Найдите средний выигрыш для владельца 5 билетов в первой лотерее.

в) Какой средний выигрыш получило лицо, купившее по одному билету в каждой лотерее?

Для овладения навыками решения этих и подобных задач Вам необходимо усвоить следующие вопросы:

*Дискретная случайная величина, закон её распределения. Числовые характеристики случайной величины. Понятие о законе больших чисел. Понятие о задачах математической статистики.*

С каждым опытом можно связать множество всех его взаимно исключающих друг друга исходов. Это множество называется *пространством элементарных исходов опыта* (ПЭИ).

Числовая функция, определенная на пространстве эле­ментарных исходов, называется *случайной величиной.* Функция, ставящая в соответствие каждому значению х случайной величины ***X*** вероятностьР(Х)=х, с которой она принимает это значение, называется *законом распределения случайной величины.*

**Задача 1.** Случайная величина *X* распределена по закону

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Xk | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Pk | 0.25 | 0.125 | 0.25 | 0.125 | 0.25 |

Найти: а) *Р(*Х ≤3); б) *Р(2*≤*Х<5);* в) *Р(1*≤*Х*≤*4);* г) *Р(Х>2).*

Событие (Х≤З) происходит тогда и только тогда, когда Х=1 или Х=2, или Х=3. Эти события попарно несовместны. Применяя теорему сложения вероятностей, получим

Аналогично, Р(2≤Х<5)=Р(Х=2)+Р(Х=3)+Р(Х=4)=0,125+0,25+0,125=0,5.

**Задача 2.** Многократными наблюдениями установлено, что стрелок при 100 выстрелах примерно 20 раз выбивает 8 очков, 50 раз — 9 очков и 30 раз — 10 очков. Составить закон распределения числа очков, выбиваемых стрелком при одном выстреле.

Здесь случайная величина *X* — число очков, выбиваемых стрелком при одном выстреле. Она принимает зна­чения *8,9,*10. Вычислим соответствующие вероятности, использовавшись статистическим определением вероятности:

Итак, закон распределения имеет вид

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Хк* | 8 | 9 | 10 |
| *Рк* | 0,2 | 0.5 | 0,3 |

Закон распределения случайной величины содержит всю вероятностную информацию о ней. Однако в ряде случаев исключительно полезны бывают некоторые постоянные числовые характеристики, дающие представление о случайной величине. Среди таких характеристик особенно большую роль играет математическое ожидание.

Пусть закон распределения случайной величины X имеет вид

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Хk | Х1 | Х2 | . . . | Хn |
| Pk | Р1 | Р2 | . . . | Рn |

где *Х*1 …*Х*n— всевозможные значения случайной вели­чины, а *рк=Р(Х=хк). к=*1, ..., n. Сумма произведений значений случайной величины на соответствующие вероятности называется *математическим ожиданием* или *средним значением случайной величины X* и обозначается *MX : M(X)=ХlР1+ +...+XnPn.*

Свойства математического ожидания:

*1)М(Х+ Y) = М(Х)+ M(Y);*

2)если С — константа, то *МС=С; М(СХ)=СМ(Х);*

3)если Х≥0, то *М(Х)*≥*0.*

**Задача 3.** Законы распределения числа очков, выбива­емых при одном выстреле каждым из двух стрелков, имеют вид

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Хк* | 8 | | 9 | 10 | |
| *Рк* | 0.4 | | 0,1 | 0,5 | |
|  |  | | |  | |  |
| *Хк* | 8 | | | 9 | | 10 |
| *Рк* | 0,1 | | | 0.6 | | 0,3 |

Какой из стрелков стреляет лучше?

Только по виду законов распределения затруднительно ответить на поставленный вопрос. Вычислим математические ожидания числа очков, выбиваемых при одном выстреле каждым из стрелков:

М(Х1 )= 8 \*0,4+9 0,1+ 10\*0,5=9,1;

М(Х2) = 8 \* 0,1 +9 \*0,6+10\* 0,3=9,2.

Второй стрелок в среднем при одном выстреле выбивает больше очков, чем первый. Следовательно, он стреляет лучше.

**Задача 4.** В цехе установлены два различных станка, производящих одинаковые детали. Законы распределения числа бракованных изделий, которые могут произвести эти станки за сутки, имеют вид

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Хк* | 0 | 1 | 2 | 3 | ХК | 0 | 1 |
| *Рк* | 0,3 | 0,4 | 0,2 | 0,1 | *Рк* | 0,9 | 0,1 |

Какое среднее число бракованных деталей произведено: а) первым станком за 10 суток; б) цехом за сутки?

Пусть Хi (i=1,2) — число бракованных деталей, изготавливаемых на i-м станке за сутки. Тогда 10Х1 — число деталей, изготавливаемых на первом станке за 10 суток; *X1+X2*— число деталей, производимых в цехе за сутки. Требуется найтиМ (10Х1) и М (Х1+Х2).

а) Согласно свойствам математического ожидания,

*М(10Х1)=10МХ1=10(0\*0,3+1\*0,4+2\*0,2+3\*0,1)=10\*1,1=11.*

б) Так какМ(Х1+Х2)=МХ1+МХ2 и МХ2=0\*0,9+1\*0,1=0,1, то М(Х1+Х2)=1,1+0,1=1,2.

Рекомендуем Вам познакомиться с понятием *выборочного среднего:*

=1/n(х1n1+…+хm nm),

где *х1*,..., хm - различные наблюдаемые значения случайной величины X; n1,…, nm - их соответствующие значения; *п* - общее число наблюдений; n1+…+ *пт = п.*

Обратите внимание, что при достаточно большом n справедливо приближенное равенство *МХ ≈.Из* этого равенства применительно к задаче 3 вытекает, что сумма чисел очков, выбиваемых первым стрелком при 100 выстрелах, приближенно равна 910.

**Вопросы и упражнения для самопроверки**

1. Пусть а и в - соответственно наименьшее и наибольшее значения случайной величины X. Чему равна P (аXв)?
2. Пусть P(X=3)=0,7 Справедливо ли равенство P(X3)=0,6?
3. Пусть P(X=3)=0,7. В каком случае справедливо равенство:

А) P(X3)=0,7?

В) P(X)=0,7?

1. Известны законы распределения числа бракованных изделий, выпущенных каждым из двух цехов за смену. Как можно сравнить качество работы этих цехов?
2. Известно, что М(Х)=3,7. Что можно сказать о значениях, которые примет случайная величина Х в 100 опытах?
3. Случайная величина принимает два значения: 0 и 1. Чему равно её математическое ожидание?
4. Можно ли утверждать, что математическое ожидание разности двух случайных величин равно разности математических ожиданий этих величин?
5. Как изменится математическое ожидание случайной величины, если ко всем ее значениям прибавить одно и то же число?
6. Как изменится математическое ожидание случайной величины, если все ее значения умножить на одно и то же число?
7. Чему равно М (-Х), если М(Х)=3?