***Практическая работа №1***

**Нахождение производной функции. Вычисление производных высших порядков. Применение второй производной. Направления выпуклости и вогнутости графика функции. Точки перегиба. Общая схема исследования функции.**

**Цели работы:**

В результате изучения этой темы Вы должны уметь:

- выполнять примеры №1-9.

Для овладения навыками решения задач Вам необходимо усвоить следующие вопросы:

**Производная.**

*Производной* функции y=f(x) в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю:

y´=f´ (x) = = .

Функция, имеющая конечную производную, называется *дифференцируемой.* Операция нахождения производной называется *дифференцированием.*

Если y=f(x) и u=(x) – дифференцируемые функции своих аргументов, то производная сложной функции у=f((x)) существует и равна произведению производной функции y по промежуточному аргументу u на производную промежуточного аргумента u по независимой переменной x:

у´x= y´u \* u ´x

Аналогичная формула верна и для сложных функций, которые задаются с помощью цепочки содержащей три звена и более.

**Таблица формул дифференцирования**

1. С´=0
2. X´=1
3. (u+ v)´ = u´ + v´
4. (uv)´ = uv´ + vu´
5. (cu) ´ = cu´
6. ()´= 
7. ()´ = -
8. (un) ´ = nu u´
9. ()´ = 
10. (a u) ´ = au  ln a \* u´
11. (е u) ´ = еu  ln eu´= euu´
12. (ln u ) ´ =  где u>0
13. (loga u ) ´ =  где u>0
14. (sin u) ´ = cos u \* u´
15. (cos u) ´ = - sin u \* u´
16. (tg u)´ = = sec2 u \* u´
17. (ctg u) ´ = - = - cosec2 u \* u1
18. (arcsin u) ´= 
19. (arccos u)´ = - 
20. (arctg u) ´= 
21. (arcctg u) ´= - 

Здесь u и v – дифференцируемые функции от x, а с – постоянная величина.

**Пример 1.**

Найти производную функции f (x) = .

**Пример 2.**

Найти производную функции y = sin3  и вычислить ее значение при = .

**Пример 3.**

Найти производную функции f (x) =ln 

**Геометрический смысл производной**

Производная функции y = f(x) представляет собой угловой коэффициент касательной, проведенный к графику функции в любой его точки.

Угловой коэффициент касательной, проведенный к графику функции y=f(x) в точке A (a;b), равен значению производной функции при x=a: kкас= y´ (a) = f´ (a).

Уравнение касательной, проведенной к графику функции в этой точке, имеет вид

y-b=k(x-a), где k= f´(a).

**Пример 4**

Составить уравнение касательной, проведенной к графику функции y= в точке с абсциссой x=2.

**Физический смысл производной**

Если тело движется по прямой по закону s=s(t), то производная пути s по времени t равна скорости движения тела в данный момент времени t:

v(t) = s´t=

Быстрота протекания физических, химических и других процессов также выражается с помощью производной.

Производная функции y=f(x) равна скорости изменения этой функции при данном значении аргумента x:

v(x) = y´= 

**Пример 5.**

Закон движения точки по прямой задан формулой s=t3 - 3t2+3t+5. В какие моменты времени t скорость движения точки равна нулю?

**Вторая производная.**

*Производной второго порядка (или второй производной)* функции называется производная от первой производной

y´´= (y´)´ или f´´(x)=(f´(x))´

**Пример 6.** Найти вторую производную функции f(x)=tg x.

**Физический смысл производной.**

Если тело движется прямолинейно по закону s=s(t), то вторая производная пути s по времени t равна ускорению движения тела в данный момент времени t:

а(t) = v´=s΄΄.

**Пример 7.**

Точка движения по прямой по закону s=t3-5t2+8t+2 (s - в метрах, t - в секундах). Найти ускорение движения точки в конце второй секунды.

**Приложения производной к исследованию функции.**

Дифференцируемая функция y = f (x) возрастает на промежутке [a, b], если ее производная положительна в каждой точке этого промежутка.

Дифференцируемая функция y = f (x) убывает на промежутке] a; b [, если ее производная отрицательная в каждой точке этого промежутка.

Функция y = f (x) имеет максимум в точке x = x1 ,если для всех значений x, достаточно близких к x1, выполняется неравенство f (x) < f (x1);

х= x1 – точка максимума; y max = f (x1) – максимум функции.

Функция y = (x) имеет минимум в точке x = x2 , если для всех значений x, достаточно близких к x2, выполняется неравенство f (x) > f (x2); для всех х= x2 – точка минимума; ymin = f (x2) – минимум функции.

Точка максимума и минимума называются точками экстремума, а значения функции в этих точках – экстремальными.

Точки, в которых производная функции обращается в нуль, называется критическими точками 1 рода.

Первое достаточное условие существования экстремума функции. Если при переходе через критическую точку 1 рода x = x0 производная функции y = f (x) меняет знак, то x = x0 – точка экстремума.

При этом если производная меняет знак с плюса на минус, то x = x0 – точка максимума, а y max = f (x0). Если же производная меняет знак с минуса на плюс, то x = x0 – точка минимума, а y min = f (x0).

Второе достаточное условие существования экстремума функции. Если в точке х=x0 первая производная функции y = f (x) обращается в нуль, а вторая производная отлична от нуля, то x = x0 – точка экстремума.

При этом если вторая производная в этой точке положительна ( fn (x0) > 0); то x = x0 - точка минимума; если вторая производная в этой точке отрицательна (f΄΄ (x0) < 0), то x = x0 – точка максимума.

**Пример 8.** Число 36 представить в виде произведения двух таких положительных множителей, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

**Направление вогнутости и точки перегиба кривой.**

Говорят, что на промежутке [a, b] кривая обращена выпуклостью вверх или выпукла ( ˆ ), если она лежит ниже касательной, проведенной в любой ее точке.

Точка A, в которой меняется направление вогнутости кривой, называется точкой перегиба кривой.

График дифференцируемой функции y = f (x) является выпуклым на промежутке [a; b] , если вторая производная функции отрицательна в каждой точке этого промежутка.

График дифференцируемой функции y = f (x) является вогнутым на промежутке [b; c] , если вторая производная функции положительна в каждой точке этого промежутка.

Точки, в которых вторая производная функции обращается в нуль, называется критическими точками 2 рода.

Если при переходе через критическую точку 2 рода x = x0 вторая производная функция меняет знак, то x = x0 – абсцисса точки перегиба. Ордината точки перегиба равна значению функции в точки x0 , т.е. y = f (x0).

f (x0) – точка перегиба графика функции y = f(x).

**Исследование функций и построение их графиков.**

Исследование функций можно проводить по следующей схеме:

1. Найти область определения функции.
2. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
3. Найти промежутки монотонности и экстремумы функции.
4. Найти направление вогнутости и точки перегиба графика функции.
5. Для уточнения графика функции рекомендуется найти несколько дополнительных точек из уравнения функции.

**Пример 9.** Построить график функции у=х3 – 3х.

**Вопросы и упражнения для самопроверки**

1. Дайте определение производной функции.
2. В чем состоит физический смысл производной?
3. В чем состоит геометрический смысл производной?
4. Дайте определение второй производной функции.
5. В чем состоит физический смысл второй производной?
6. Напишите все формулы дифференцирования.
7. Как найти промежутки возрастания и убывания функции?
8. Как найти точки экстремума и экстремумы функции?

9. Как найти промежутки выпуклости и вогнутости кривой?

10. Как найти точки перегиба кривой?